

Contrôle 1 d'Algèbre 3

PARTIE 1

1. L'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x+y = 1\}$ est-il un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 ? Justifier.
2. Donner un exemple d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$. Justifier.
3. Dans \mathbb{R}^2 , la famille $\{(0,0), (1,1)\}$ est-elle libre ? Justifier.
4. Citer 2 propriétés de familles libres d'un espace vectoriel.
5. La famille $\{(0,0,1), (1,1,1)\}$ est-elle génératrice de \mathbb{R}^3 ? Justifier.
6. Citer 2 propriétés de familles génératrices d'un espace vectoriel.
7. Enoncer de façon plus précise le théorème de la base incomplète.
8. Soit le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 : $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x-z = 0\}$.
 - (a) Donner une base de F. En déduire la dimension de F.
 - (b) Le sous-espace vectoriel F, est-il une droite vectorielle, un plan vectoriel ou un hyperplan vectoriel de \mathbb{R}^3 ? Justifier.

PARTIE 2

9. Préciser la définition d'une matrice inversible A.
10. Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ telle que : $A^2 - A = I_3$.

Montrer dans ce cas que, A est inversible et calculer A^{-1} .
11. On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x,y,z) \mapsto x-z$
 - (a) Donner une base de $\text{Ker}(f)$ et une base de $\text{Im}(f)$. Préciser le rang de f.
 - (b) L'application f est-elle injective, surjective, bijective ? Justifier.